

Análise Matemática IV - 2003/04

Problemas para as Aulas Práticas

21 de Março de 2005

Semana 4

1. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

- (a) Mostre que u é uma função harmónica.
- (b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0, 0) = 0$.
- (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz \quad \text{e} \quad \oint_C \frac{f(z)}{z^3} dz$$

onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

2. Considere a função $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} tais que $u(x, y) = \operatorname{Re}[g(x + iy)]$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}[g(x + iy)]$.
- (a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g ?
 - (b) Mostre que u é uma função harmónica.
 - (c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica em \mathbb{C} , tal que $\operatorname{Re}(f) = u$.

3. Calcule a região de convergência das seguintes séries de potências:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\right)^n}{n^4 + 1} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z + 1 - i)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z + 1)^n$$

4. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{onde} \quad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se } n \text{ par} \\ (-2)^n & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}.$$

Sabendo que esta é a série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ de uma função f , analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

5. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

- (a) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.
- (b) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.
- (c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.
- (d) Valor principal de $\log z$, em torno de $z = i - 1$.

6. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

- (a) $\frac{1}{z-1}$, $|z| > 1$.
- (b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z \right)$, $|z| > 0$.
- (c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i| > 1$.
- (d) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right)$, $|z| > 0$.

7. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2-1)^2}$ nas seguintes regiões:

- (a) $0 < |z-1| < 2$.
- (b) $2 < |z-1|$.

e calcule os seguintes integrais:

- (a) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$.
- (b) $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$

8. Seja $P(z)$ um polinómio e γ uma curva simples e fechada em \mathbb{C} , percorrida uma vez no sentido directo, e que não intersecta o conjunto dos zeros de $P(z)$. Mostre que o valor de

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

é igual ao número de zeros (contando multiplicidades) de $P(z)$ que pertencem ao interior da curva γ .